

## Grado en Matemáticas

### Examen de Análisis Matemático I – julio 2017

1. Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$  y definamos  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ . Prueba que si  $A$  es cerrado y  $B$  es compacto entonces  $A + B$  es cerrado.

2. Sea

$$f(x, y) = \frac{(x-1)^2 y}{(x-1)^4 + y^2}, \quad f(1, 0) = 0$$

- a) Estudia la continuidad y diferenciabilidad de  $f$ .
- b) Calcula  $D_{\mathbf{u}}f(1, 0)$  donde  $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .
- c) Calcula la dirección y el valor de la derivada direccional mínima de  $f$  en  $(0, 0)$ .
- d) Calcula las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie  $z = f(x, y)$  en el origen.
3. Sean  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  campos escalares definidos en un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $\mathbf{a} \in \Omega$  y supongamos que  $f$  es diferenciable en  $\mathbf{a}$ ,  $f(\mathbf{a}) = 0$  y  $g$  es continua en  $\mathbf{a}$ . Calcula el gradiente del campo escalar  $fg$  en  $\mathbf{a}$ . Prueba que  $fg$  es diferenciable en  $\mathbf{a}$ .
4. Sean  $\mathbf{F} = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  y definamos  $h = g \circ \mathbf{F}$ . Expresa  $D_{12}h(x, y)$  por medio de las derivadas parciales de  $f_1, f_2$  y  $g$  e indica cómo se evalúan dichas derivadas parciales. Considera el caso particular

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^x \cos y, e^y \sin x), \quad g(u, v) = e^{uv} \sin(uv)$$

y calcula  $D_{12}h(0, 0)$ .

5. Comprueba que la ecuación

$$xyz + \sin(z-6) - 2x - 2y - 2x^2y^2 = 0$$

define a  $z$  como función implícita de  $(x, y)$  en un entorno  $U$  de  $(1, 1)$ , con  $z(1, 1) = 6$ . Comprueba que  $(1, 1)$  es un punto crítico de la función  $z = z(x, y)$  y clasifica dicho punto crítico.

6. Elegir uno de los temas:

- a) Regla de la cadena (versión general). Derivadas parciales de una función compuesta.
- b) Teorema de la función inversa.

Pondré las calificaciones en PRADO2 el próximo jueves día 13. Revisión de exámenes el próximo viernes día 14 de 10h a 12h en mi despacho. No se admitirán revisiones de exámenes en otra fecha.

Granada, 11 de julio de 2017